

補間法により設計された狭帯域低域低感度デジタルフィルタ

Narrow Band Lowpass IIR Digital Filter with Low Sensitivity Designed by Interpolation Method

栖原 淑郎

Yoshiro Suhara

【要 約】

デジタルフィルタの設計において、各種デジタル演算での量子化による丸め誤差が周波数特性に与える影響の問題がある。フィルタの乗算器で発生する丸め誤差がフィルタの特性に与える影響を示す指数を係数感度と呼ぶ。信号処理の分野において狭帯域低域 IIR デジタルフィルタは他の FIR デジタルフィルタ、FFT 等に比べて非常に低次数で低域フィルタが実現できる特徴がある。しかし、極が $z=1$ 又は実軸に近く、係数感度が著しく高くなる性質がある。現在までに低感度デジタルフィルタに関する研究は多く行われている^{[1][2][3]}。

本報告では、まず、補間に基づくデジタルフィルタの設計法について述べる。本設計は、従来の IIR 型フィルタに比べて、低次数で急峻な特性が得られる^[19]。次に係数感度の計算方法について述べ、フィルタの伝達関数の極の位置より係数感度を求める方法を導く。さらに、この方法により補間に基づくデジタルフィルタの係数感度を求める。最後に他の知られている IIR 型デジタルフィルタの係数感度を求め、補間に基づくデジタルフィルタの設計が低感度であることを数値計算により示す。

キーワード IIR デジタルフィルタ、係数感度、補間

[Abstract]

In the design of a digital filter, there is a problem of the influence which the rounding error by quantization by various digital operations has on a frequency characteristic. The rounding error which occurs with the multiplier of a filter calls coefficient sensitivity which shows the influence which it has on the characteristic of a filter. In the field of signal processing, a narrow band low-pass IIR digital filter has the feature which can realize a low-pass filter by a lower degree very much compared with other FIR digital filters, FFT, etc. However, a pole is close to $z=1$ or a real axis, and there is character in which coefficient sensitivity becomes remarkably high. Many researches on a low sensitivity digital filter are done till the present.

This report describes the design method of a digital filter based on interpolation first. As for this design, compared with the conventional IIR type filter, the steep characteristic is acquired by a lower degree. Next, the calculation method of coefficient sensitivity is described and the method of asking for coefficient sensitivity from the position of the pole of the transfer function of a filter is drawn. Furthermore, it asks for the coefficient sensitivity of the digital filter based on interpolation by this design method. Finally it asks for coefficient sensitivity of other IIR type digital filters known, and numerical computation shows that the design of a digital filter based on interpolation is low sensitivity.

Key Word IIR digital filter, coefficient sensitivity, interpolation,

1. はじめに

信号処理の分野では、われわれはいろいろな信号の量を測定し、それをデジタルコンピュータにて処理し、その特徴を抽出することがさかんに行われている。測定信号としては、血圧、地震波、音声信号、画像信号等多くの例があげられる。これらの測定信号は、一般に時間とともに変化する。又、通常測定信号は連続的に変化する量で、アナログ信号である。信号処理ではほとんどの場合アナログ信号をデジタル化し、デジタル信号処理を行う方法が取られている。信号処理はリアルタイム処理で行うため専用のデジタルシグナルプロセッサが使われる。この中でフィルタリングを行うデジタルフィルタは、加算器、乗算器及び遅延器にて構成される。信号処理においてわれわれがデータ処理を行うのは、測定信号の基礎的現象について何等かの情報を得ることを目的とする。デジタルフィルタは、データ処理を行う最も重要な手法である。デジタルフィルタは、時間応答(インパルス応答)の特徴によりインパルス応答が有限時間しか続かない FIR デジタルフィルタとインパルス応答が無限に続く IIR デジタルフィルタに分けられる。FIR デジタルフィルタは波形伝送の際に必要な直線位相特性を持つ設計が可能であるが、急峻な遮断特性を実現するには次数が非常に高くなる。これに対して IIR デジタルフィルタは、完全な直線位相特性は実現できないが低次で急峻な特性を得ることができる^{[4][5][6][7]}。しかし、係数量子化による有限語長の周波数特性におよぼす影響、すなわち係数感度が大きくなり、実現したデジタルフィルタの周波数特性が設計より大きく異なる場合がある。特に狭帯域低域デジタルフィルタを実現する場合、係数感度が非常に大きくなり低感度化が望まれている。本報告では、著者等が提案した

補間法を用いた補間に基づく IIR 低域デジタルフィルタについて設計法を述べる。次に、本設計法が従来の設計法に比べて低次数で急峻な特性が得られることを数値計算にて求められた結果より示す。さらに、デジタルフィルタの係数感度について示し、伝達関数の極の位置と係数感度との関係を示す。次に、補間に基づく設計法の係数感度を求める方法について示し、狭帯域 IIR 低域デジタルフィルタの場合の係数感度を示す。さらに、従来より知られている IIR 低域デジタルフィルタについて係数感度を求め、最後に補間法に基づいて設計された狭帯域デジタルフィルタが他の IIR 型フィルタに比べて低感度で所望の周波数特性が得られることを示す。

2. 補間型 IIR デジタルフィルタの設計

IIR デジタルフィルタの伝達関数 $H(z)$ は一般に有理関数で

$$H(z^{-1}) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} \quad (1)$$

と表される。ここで $n(z)$ 及び $d(z)$ は実係数の多項式で、 $d(z)$ の最高次の係数は 1 とおける。伝達関数 $H(z)$ は特性関数 $\Phi(z)$ を用いて

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{K^2}{1 + \Phi(z)\Phi(z^{-1})} \quad (2)$$

と表される。ここで特性関数は

$$\Phi(z^{-1}) = \frac{h(z^{-1})}{f(z^{-1})} \quad (3)$$

と表せ、 $h(z)$, $f(z)$ は、一般性を失わずに共通因数がないとおける。著者等は特性関数を Lagrange の補間式を用いて設計する方法を提案した。本設計法は、種々の条件が与えられた場合の設計が可能で、特に遷移域の条件が詳細に与えられた場合の高精度な設計が可能であることが

特徴である[8][9][10][11][12][13][14][15][16][17]。なお、 K は、通過域における減衰量で通常は1である。本設計法により得られる伝達関数 $H(z^{-1})$ は z -平面の単位円内にのみ零点をもつようにすることができる^[13]。従って、設計されるフィルタは安定性を満足するようにできる。ここで $z = e^{j\omega}$ とおき $x = \cos \omega$ とすると二乗振幅特性は

$$|H(z)|^2 = 1 / \{1 + |\hat{\Phi}(x)|^2\} \quad (4)$$

と表される。ただし、

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(z^{-1}) \Big|_{z = \frac{z + z^{-1}}{2}} \Big|_{z = e^{j\omega}} \quad (5)$$

である。

本論文では、図1.に示すように補間点を5個持つ補間型低域デジタルフィルタについて議論を行う。通過域端及び阻止域端の角周波数、振幅をそれぞれ $\omega_p, \rho_p, \omega_s, \rho_s$ とし、角周波数

$\omega_1 (\omega_s < \omega_1 < \pi)$ に補間点を配置した場合の

$\Phi(z^{-1})$ は次のように定められる。

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 1 \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (6)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_1} = 0 \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_1} = \infty \quad (7)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = 0 \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = \infty \quad (8)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_p} = \rho_p \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_p} = \gamma_p \quad (9)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_s} = \rho_s \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_s} = \gamma_s \quad (10)$$

ただし、

$$\gamma_p = \sqrt{\rho_p^{-2} - 1} \quad (11)$$

$$\gamma_s = \sqrt{\rho_s^{-2} - 1} \quad (12)$$

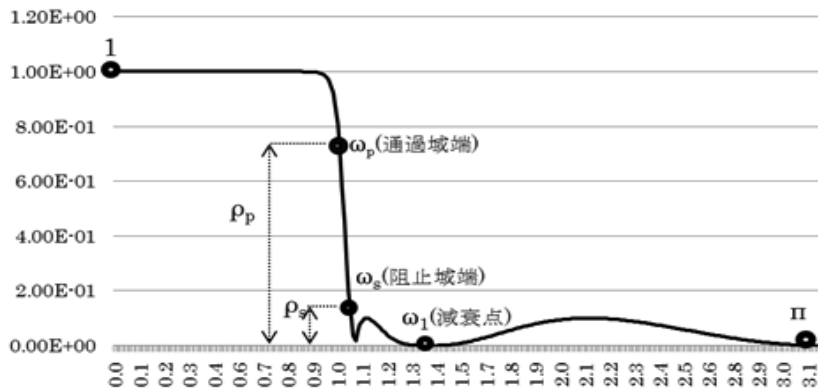


Fig.1

以上の条件で Lagrange の補間法を用いて $\hat{\Phi}(x)$ を求めると

$$\hat{\Phi}(x) = |F(x)/a(b-x)| \quad (13)$$

と表される。但し、

$$F(x) = \left| (1-x)^M / (1+x)(x_1-x)^{M-2} \right| \quad (14)$$

$$a = [F(x_s)/\gamma_s - F(x_p)/\gamma_p] / (x_s - x_p) \quad (15)$$

$$b = \frac{F(x_s)x_p/\gamma_s - F(x_p)x_s/\gamma_p}{F(x_s)/\gamma_s - F(x_p)/\gamma_p} \quad (16)$$

ここで

$$x_p = \cos \omega_p, x_s = \cos \omega_s, x_1 = \cos \omega_1 \quad (17)$$

Fig.1 に示すフィルタは通過域、遷移域は、単調減少で通過域最大平坦特性を持ち、阻止域は、二つのリップルを持つフィルタである。著者は補間型低域デジタルフィルタが遷移域の最小値即ち、過域端 ω_p を与えた時の阻止域端 ω_s の最小値を求める方法を示した^[12]。本論文では感度特性について考察する。さらに、従来のフィルタと比較し、狭帯域低域フィルタについて、低感度フィルタが実現できることを数値計算により示す。

3.係数感度の定義

感度にはいろいろな定義がある。例えば係数感度、固有値感度、固有値感度などである。係数感度は、伝達関数の係数の変化による感度特性を示し、極感度は伝達関数の極の変化を示す感度特性である。又、固有値感度は、伝達関数を状態方程式で表した場合の遷移行列の固有値の変化を示す感度特性である。本論文では、乗算器の有限語長演算による丸め誤差の影響を議論する係数感

度を用いる。まず、パラメータ x_1, x_2, \dots, x_n を

持つ $f(x)$ においてパラメータ x_i の変化により

おこる $f(x)$ の変化の割合でパラメータ x_i に対

する感度 $S_x^{f(x)}$ を次のように定める。

$$S_x^{f(x)} = \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \ln x} = \frac{\partial f(x)/f(x)}{\partial x/x} \quad (18)$$

係数感度の場合 $f(x)$ は伝達関数 $H(z)$ であり、 x は乗算係数である。即ち、

$$S_x^{|H|} = \frac{\partial \ln |H|}{\partial \ln x} = \frac{x}{|H|} \cdot \frac{\partial |H|}{\partial x} \quad (19)$$

伝達関数 $H(z)$ は二次の縦続接続で構成され分子分母とも 2 次の回路で実現するものとする

$$H(z) = K \prod_{v=1}^M \frac{z^2 + m'_v z + n'_v}{z^2 + m_v z + n_v} \quad (20)$$

と表される。ここで m_v, n_v, m'_v, n'_v は、乗算係数である。k 番目の二次区間を取り出して陽に表すと

$$H(z) = \tilde{H}_k(z) \frac{z^2 + m'_k z + n'_k}{z^2 + m_k z + n_k} \quad (k=1, \dots, M) \quad (21)$$

但し

$$\tilde{H}_k(z) = K \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^M \frac{z^2 + m'_v z + n'_v}{z^2 + m_v z + n_v} \quad (22)$$

となる。ところで、分子の係数感度は分母の係数

感度に比べて非常に小さい。よって、以後分母の係数感度について議論を進める。これより係数感度を計算すると

$$S_{m_k}^{|H|} = m_k \left| z^2 + m_v z + n_v \right| \frac{\partial}{\partial m_k} \frac{1}{\left| z^2 + m_k z + n_k \right|} \quad (23a)$$

$$S_{n_k}^{|H|} = n_k \left| z^2 + m_k z + n_k \right| \frac{\partial}{\partial n_k} \frac{1}{\left| z^2 + m_k z + n_k \right|} \quad (23b)$$

となる。ここで $z^2 + m_k z + n_k = 0$ の解を $re^{\pm j\theta}$

とおくと $m_k = -2r \cos \theta, n_k = r^2$, となる。又、

$z = e^{j\omega}$ とおくと $\text{Re}(z) = \cos \omega, \text{Im}(z) = \sin \omega$ と

なる。以上を代入すると

$$S_{m_k}^{|H|} = \frac{2r \cos \theta \left((r^2 + 1) \cos \omega - 2r \cos \theta \right)}{\left| e^{2j\omega} - (2r \cos \theta) e^{j\omega} + r^2 \right|^2} \quad (24a)$$

$$S_{n_k}^{|H|} = \frac{-r^2 \left(2 \cos^2 \omega - 2r \cos \theta \cos \omega + r^2 - 1 \right)}{\left| e^{2j\omega} - (2r \cos \theta) e^{j\omega} + r^2 \right|^2} \quad (24b)$$

となる。ここで各係数感度は、周波数 ω の関数であり、Fig.2 に示すように共振角周波数の近くで最大値をとる。Fig.3.に、 $r=0.99, \theta=0.5$ の場合の係数感度と共振角周波数の関係の例を示す。

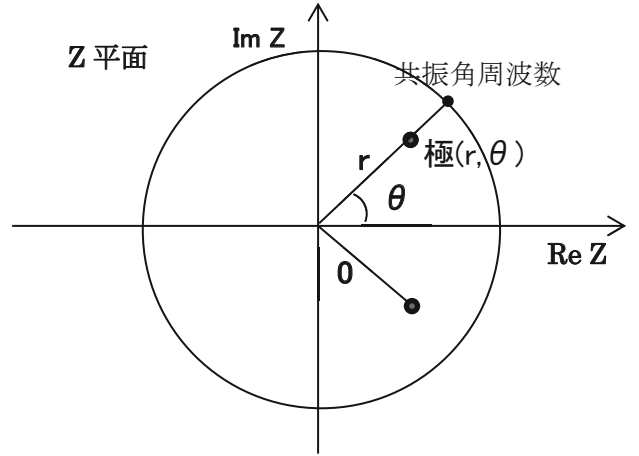


Fig.2

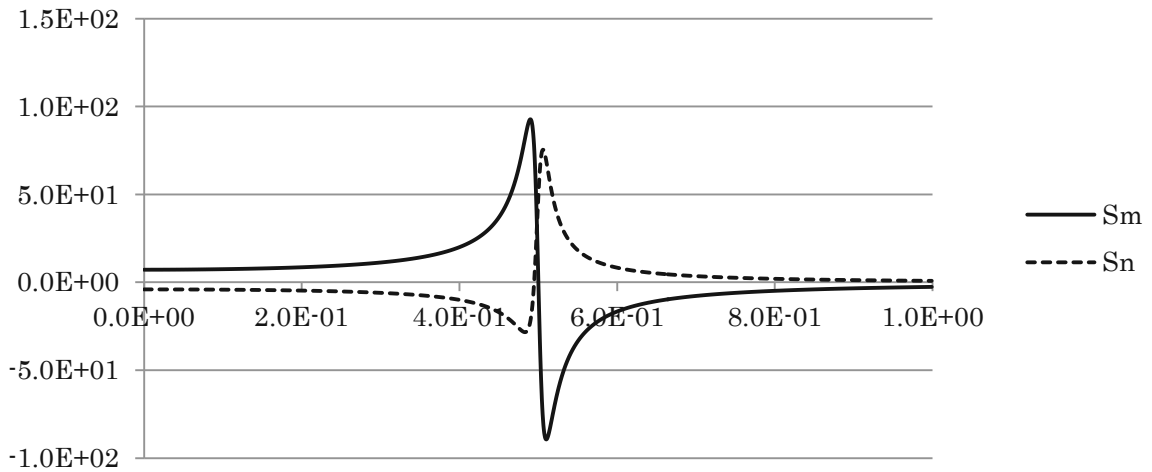


Fig.3

(24a),(24b)より

$$S_{m_k}^{|H|} = \frac{2r \cos \theta \left((r^2 + 1) \cos \omega - 2r \cos \theta \right)}{4r^2 \cos^2 \omega - 4r(r^2 + 1) \cos \theta \cos \omega + (r^2 - 1)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta} \quad (25a)$$

$$S_{n_k}^{|H|} = \frac{-r^2 \left(2 \cos^2 \omega - 2r \cos \theta \cos \omega + r^2 - 1 \right)}{4r^2 \cos^2 \omega - 4r(r^2 + 1) \cos \theta \cos \omega + (r^2 - 1)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta} \quad (25b)$$

が得られる。

る。極値における最大値を計算した結果を以下に

係数感度の最大点では、感度曲線は極値をとる。示す。

従って、係数感度の ω に関する微係数は、0 とな

$$S_{m_k}^{|H|} = \frac{\pm (1+r^2)^2 \cos \theta}{2(1-r^2) \left(\sqrt{(1+r^2)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} \mp (1-r^2) \cos \theta \right)} \quad (26a)$$

$$S_{n_k}^{|H|} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1+r^2)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} \pm \left(\frac{2r^2 \cos^2 \theta + (1-r^4)}{1-r^2} \right)}{\sqrt{(1+r^2)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} \pm \left((1+r^2) - 2 \cos^2 \theta \right)} \quad (26b)$$

ここで、複合は、感度曲線の二個の頂点における係数感度の値を表す。最大係数感度は、二個の頂点で絶対値が大きい方を取る。

に代入して
伝達関数を計算すると

$$\begin{aligned} H(z)H(z^{-1}) \\ = \frac{a^2(1+x)^2(x_1-x)^{2M-4}(b-x)^2}{a^2(1+x)^2(x_1-x)^{2M-4}(b-x)^2 + (1-x)^{2M}} \end{aligned} \quad (27)$$

4. 補間型デジタルフィルタの係数感度及び他のフィルタとの比較

次に、五個の補間点を持つデジタルフィルタの係数感度を求める^[16]。(19), (20), (21)を(10)

となる。但し、

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad (28)$$

である。(27)の分母=0 の $2M$ 個の根を数値計算により求める。次に、(28)より得られる z に関する二次方程式

$$z^2 - 2xz + 1 = 0 \quad (29)$$

に代入すると、(27)の z に関する $4M$ 個の根が得られる。この中で絶対値が 1 より小さい $2M$ 個の根を取り出すことにより、補間に基づくデジタルフィルタの根が求まる。これを極形式(r, θ)で表し、(26a),(26b)に代入すると係数感度が得られる。Table1.に通過域端 $\omega_p = 0.1$ 通過域の最大減

衰量 $\rho_p = -0.1[\text{dB}]$ の補間型フィルタについて、

極の実部(Real),虚部(Imag)及び係数感度 S_{mk}

S_{nk} を計算したものを示す。一般に係数感度

は $S_{mk} > S_{nk}$ である。又、係数感度は、根の絶

対値にもよるが、根の実軸との距離にもよる。表 1.では、根の虚部が最も小さい点の係数感度が最大値となっている。

次に、従来より低感度なフィルタとして知られている Butterworth フィルタの係数感度を求め、補間型フィルタの係数感度と比較する。表 2.に通

過域端 $\omega_p = 0.1$ 、通過域の最大減衰量 $\rho_p =$

$-0.1[\text{dB}]$ の Butterworth フィルタの係数感度を示す。Table1.と比較すると係数感度の値が低くなっていることがわかる。即ち、補間型フィルタは、従来のフィルタに比べて、低感度で低次数のフィルタが実現できること数値的に示された。

5.むすび

本報告では、従来より得られている 5 点補間フィルタに関して、伝達関数を求めた。さらに、係数感度を求める一般的な方法を導き、従来より低

Real	Imag	S_{mk}	S_{nk}
9.67417E-01	-6.88928E-02	3.48419E+02	1.66852E+02
9.67417E-01	6.88928E-02	3.48419E+02	1.66852E+02
9.15956E-01	-1.53467E-02	3.59461E+03	1.79507E+03
9.15956E-01	1.53467E-02	3.59461E+03	1.79507E+03
9.47380E-01	-5.88934E-02	3.30860E+02	1.61324E+02
9.47380E-01	5.88934E-02	3.30860E+02	1.61324E+02
9.87250E-01	-7.39659E-02	7.60189E+02	3.56617E+02
9.87250E-01	7.39659E-02	7.60189E+02	3.56617E+02
9.28583E-01	-4.15281E-02	5.43205E+02	2.68823E+02
9.28583E-01	4.15281E-02	5.43205E+02	2.68823E+02

Table1. 補間型フィルタの係数感度

Real	Imag	Sm _k	Sn _k
9.83825E-01	8.07251E-02	5.50602E+02	2.57298E+02
9.60467E-01	7.10942E-02	2.92818E+02	1.40533E+02
9.41453E-01	5.53037E-02	3.50165E+02	1.71489E+02
9.28104E-01	3.50037E-02	7.46295E+02	3.70399E+02
9.21237E-01	1.19722E-02	5.95814E+03	2.97664E+03
9.21237E-01	-1.19722E-02	5.95814E+03	2.97664E+03
9.28104E-01	-3.50037E-02	7.46295E+02	3.70399E+02
9.41453E-01	-5.53037E-02	3.50165E+02	1.71489E+02
9.60467E-01	-7.10942E-02	2.92818E+02	1.40533E+02
9.83825E-01	-8.07251E-02	5.50602E+02	2.57298E+02

Table2. Butterworth 型フィルタの係数感度

感度フィルタで知られている狭帯域 Butterworth filter と 狭帯域 5 点補間フィルタとの比較を行った。その結果、補間型フィルタが Butterworth filter より、低感度であることが示された^{[18][19][20]}。本報告で低次数で低感度なフィルタであることが、数値計算上で示された。

今後、フィルタの補間点における微係数を与えた時の設計について、検討し、低次数、低感度なフィルタの実現の研究を行う予定である。

参考文献

- [1] A.Sedlmeyer,A.Fettweis: “Digital Filter with True Ladder Configuration,” Int. J. Circuit theory and Application, 1.1, pp5-10 (1973)
- [2] M.Bhattacharya, R.C.Agarwal,S.C.Duttaroy: “On Realization of Low-Pass and High-Pass Recursive Filters with Low Sensitivity and Low-Round off Noise” IEEE Trans. Circuit & Syst. Vol.CAS-33, No.4, pp425-428 Apr. 1986
- [3] P.P.Vaidyanathan,S.K.Mitra, Y.Neuvo: “A New Approach to the Realization of Low-Sensitivity IIR Digital Filters,” IEEE Trans. Acoust.,Speech,Signal Processing, Vol.ASSP-34, No.2, pp.350-361, April. 1986
- [4] 谷萩隆嗣『ディジタル信号処理と基礎理論』コロナ社、1,996 年 3 月.
- [5] 谷萩隆嗣『ディジタルフィルタと信号処理』コロナ社、2,001 年 12 月.
- [6] “Handbook for Digital Signal Processing.”, Edited by Sanjit K. Mitra & James F.Kaiser, John Wiley & Sons (1,993)
- [7] Alan V. Oppenheim & Ronald W.Schafer“Digital Signal Processing”, Prentice-Hall(1,975)
- [8] Walsh,J.L. “Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain,” American Math. Soc. Colloquium Pub. Vol.xx,(1,960)
- [9] 栖原淑郎、古賀利郎「補間に基づく巡回型ディジタルフィルタの特性の近似」,信学論 (A),J75-A,8,pp1341-1346,(1,992 年 8 月)
- [10] Suhara,Y.,Koga,T.“A Method of Designing IIR Digital Filters with Maximal Flatness in Passband and Prescribed Steepness in Transition Band”, Trans. IEICE, E73, 11,pp.1807-1809 Nov.(1,990)
- [11] Suhara,Y.,Koga,T.“A Designing Method of IIR Digital Filters Taking Account of Transition Band

Characteristics”, Proc. JTC-CSCC’90, pp.501-506

Dec.(1,990)

[12]Suhara,Y.“A Method of Designing IIR Digital Filters with Minimum Number of Interpolation Points”, Trans. IEICE, E74,9,pp.2652-2654

Sept.(1,991)

[13]Suhara,Y.,Koga,T.“A Method of Designing IIR Digital Filters by Means of Interpolation Taking Account of Transition Band Characteristics”, Trans. IEICE, Fundamentals, Vol.E76-A,No.4 April(1,993)

[14]Suhara,Y.,Koga,T.,Madachi T.“A Method of Approximating Characteristics of Linear Phase Digital Filters”, Proc. JTC-CSCC’92, pp.422-427, July(1,992)

[15]Suhara,Y.,Madachi T.,Koga,T.“A Method of Approximating Characteristics of Linear Phase Digital Filters Utilizing Interpolation Technique in

Combination with LMS Method”, Trans. IEICE

[16]栖原淑郎、「補間法による狭帯域低域通過型低感度デジタルフィルタの設計」, 第 14 回デジタル信号処理シンポジウム C4-2(1,999-11)

[17] 栖原淑郎、「補間法により設計された IIR 型デジタルフィルタの遮断特性」 Proceedings of the 2011 IEICE General Conference A-4-32

(2,011-03)

[18] 栖原淑郎、「補間型 IIR デジタルフィルタの設計アルゴリズム」 Proceedings of the 2012 IEICE General Conference A-4-12(2,012-03)

[19]栖原淑郎、「補間型 IIR デジタルフィルタの設計方法」 Proceedings of the 2013 IEICE General Conference A-4-12(2,013-03)

[20]栖原淑郎、「狭帯域補間型 IIR デジタルフィルタの直線位相性について」, Proceedings of the 2014 IEICE General Conference A-4-4(2,014-03)